Inspectoratul Scolar Judetean Gorj

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A X-A

15 februarie 2015

Problema 1:

a) Arătați că $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2, \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

b) Dacă a,b,c,d $\in (1,\infty)$ arătați că $log_a \frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d} + log_b \frac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a} + log_c \frac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b} + log_d \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq 4$

Problema 2:

Fie $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^* \to \boldsymbol{M}, \boldsymbol{M\ inclus\ in}\ \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{ax^3+1}}{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$**.** Să se determine **a și M** încăt funcția f să fie bijectivă

Problema 3:

Fie $z_1, z_2, \ldots, z_{2015} \in \mathbb{C}$. Arătați că dacă$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_{2015}|^2 = R_e(z_1z_2 + z_2z_3 + \cdots + z_{2015}z_1)$ atunci numerele $z_1 + z_2 + \ldots + z_{2015}$ și $z_1z_2 \ldots z_{2015}$ sunt reale.

Problema 4:

Fie $g: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $g(x) \leq -g\left(\frac{1}{x}\right), \forall\, x \in (0,\infty)$.

Să se determine funcțiile f: $(0,\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât să fie satisfăcute condițiile:

a)$f(x) \leq g(x), \forall\, x \in (0,\infty)$

b) $f(xy) \leq f(x) + f(y), \forall\, x,y \in (0,\infty)$

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problema are 7 puncte